E.N.S.I. DE CHIMIE GROUPE SUD

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

On pourra aborder les différentes parties du problème (chiffres romains) comme si elles étaient indépendantes. **Mais il est recommandé aux candidats d'indiquer clairement le numéro de chaque question traitée, et de soigner la présentation de leur copie, ce dont il sera tenu compte.**

Ci-dessous, valeurs numériques utilisables, en plus des tables numériques usuelles :

Log 2 = 0, 69 31 47	$\pi = 3, 14\ 15\ 92$
Log 3 = 1, 09 86 12	$\pi\sqrt{2} = 4, 44\ 28\ 83$
Log 4 = 1, 38 62 95	$\pi\sqrt{3} = 5, 44\ 13\ 98$
Log 5 = 1, 60 94 37	$\sqrt{2} = 1, 41\ 42\ 14$
	$\sqrt{3} = 1, 73\ 20\ 51$

I

On considère la fonction réelle y de la variable réelle x :

$$x \longmapsto y(x) = \text{Log}\,(1 + x + x^2)$$

1° Calculer les dérivées y' et y'' et donner un tableau précis des variations de la fonction y.

2° Construire la représentation graphique (C) de la fonction y, dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé d'axes Ox, Oy, avec une unité de longueur égale à 4 centimètres.
(C) admet-elle un axe de symétrie?

3° Étudier, quand $x \to \pm\infty$, la position de (C) par rapport aux deux courbes (C_1) et (C_2) d'équations respectives :

$$y_1 = \text{Log}(x^2) \qquad y_2 = \text{Log}\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)$$

4° Calculer l'aire algébrique de la portion de plan comprise entre la courbe (C), l'axe Ox, et les droites qui ont pour équation $x = -1$ et $x = 0$, l'unité d'aire étant l'aire d'un carré dont le côté a pour longueur l'unité de longueur; on désignera par $\mathcal{A}$ sa valeur absolue; on demande la valeur exacte de $\mathcal{A}$, et sa valeur approchée à 10^{-6} près.

5° Calculer, sans intégration et avec la même unité que précédemment, la valeur exacte et la valeur approchée à 10^{-6} près de l'aire $\mathcal{B}$ de la portion de plan comprise entre le cercle d'équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 + x - y = 0 \quad ,$$

l'axe Ox, et telle que $y < 0$. Expliquer brièvement pourquoi $\mathcal{B}$ peut fournir une approximation du résultat trouvé pour $\mathcal{A}$.

6° Décomposer $y'(x)$ en éléments simples, sur le corps des complexes.

En déduire le développement, en série entière de la variable x, de y', puis de y.

Pour quelles valeurs de x ce développement est-il convergent?

II

1° Montrer que la fonction :

$$x \longmapsto \text{Log}\,(1 + x + x^2)$$

vérifie la relation fonctionnelle :

$$f(x) + f(-x) = f(x^2) \qquad (1)$$

pour toutes les valeurs réelles de x.

Peut-on vérifier la relation en utilisant le développement de y en série entière, obtenu en I, 6°?

2° On appelle ici *fonctions de classe* $\mathcal{K}$ *les fonctions réelles* f *qui admettent une dérivée seconde pour tout* x *réel, et satisfont à la condition* (1).

Montrer que, si f est une fonction de classe $\mathcal{K}$, elle possède les propriétés suivantes :

a. $f(0)$ n'est pas arbitraire;

b. $f(-1)$ n'est pas arbitraire;

c. f' vérifie une relation fonctionnelle; quelle est-elle?

d. Il y a une relation entre $f'(1)$ et $f'(-1)$, laquelle?

e. Il y a une relation entre $f''(0)$ et $f'(0)$, laquelle?

f. Si f n'est pas identiquement nulle, elle n'est pas impaire.

Montrer que l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{K}$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur le corps des réels.

3° *a.* Montrer que toute fonction réelle f, de la variable réelle x, définie sur **R**, est la somme d'une fonction paire p, et d'une fonction impaire q, et que si f admet une dérivée seconde, il en est de même de p et q.

b. Quelle est la relation (2) vérifiée par p et q, si f est solution de (1)?

c. Dans ce dernier cas, que peut-on dire de $p(0)$ et de $q(0)$?

4° On cherche des solutions de (1) sous la forme :

$$f(x) = \text{Log} \mid \varphi(x) \mid ,$$

la fonction φ étant supposée posséder une dérivée seconde en tout point de **R**, et éventuellement des zéros, simples ou multiples, mais isolés. Ces zéros de φ, quand ils existent, constituent des points où $f(x)$ n'est pas définie.

Soit $\mathcal{K}'$ la classe de ces nouvelles fonctions f solutions de (1).

Montrer que :

a. $\mathcal{K}' \supset \mathcal{K}$

b. L'ensemble des fonctions de la classe $\mathcal{K}'$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur le corps des réels;

c. Si $f \in \mathcal{K}'$, la fonction φ associée vérifie une relation fonctionnelle, laquelle?

d. La classe $\mathcal{K}'$ contient les fonctions paires : $x \longmapsto \text{Log}(x^{2p})$, pour tout entier strictement positif p.

e. La classe $\mathcal{K}'$ contient les fonctions : $x \longmapsto \text{Log} \mid 1 - x^{2p-1} \mid$, pour tout entier strictement positif p.

f. La classe $\mathcal{K}'$ contient les fonctions :

$$x \longmapsto \text{Log}(x^{2p} + x^{2p-1} + x^{2p-2} + \ldots + x^{2p-2k}) ,$$

pour tous les entiers k et p tels que : $0 < k < p$.

5° Retrouver la fonction y, de la partie I, comme combinaison linéaire de fonctions de la classe $\mathcal{K}'$.

Utiliser cette expression de y pour obtenir son développement en série entière à partir de développements connus.

6° On considère l'espace vectoriel E, sur le corps des réels, engendré par les quatre solutions de (1), f_1 , f_2 , f_3 et f_4 telles que :

$$f_1(x) = \text{Log} \mid 1 - x \mid \quad , \quad f_2(x) = \text{Log}(x^2) ,$$

$$f_3(x) = \text{Log} \mid 1 - x^3 \mid \quad , \quad f_4(x) = \text{Log}(x^4)$$

a. Montrer que $\{f_1 , f_2 , f_3\}$ forme une base de cet espace.

b. On pose : $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$,
et on prend pour nouvelle base de E : $\{F_1 , F_2 , F_3\}$ définie par :

$$F_1 = f_1 \quad , \quad F_2 = f_2 \quad , \quad F_3 = f_3 - f_1 ,$$

de sorte que :

$$f = \beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \beta_3 F_3 .$$

Quelle est la matrice de passage P de la première base à la deuxième? Écrire la relation matricielle entre

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

Quelles sont les décompositions de la fonction g :

$$x \longmapsto g(x) = \text{Log}\ \frac{(1-x)^3\,(1-x^3)}{x^6}$$

dans chacune des deux bases de E définies précédemment ?

III

1° Montrer que, de toute fonction f qui vérifie (1) sur le segment $[-1,\ 1]$, on peut déduire une fonction h qui vérifie (1) pour $|x| \geqslant 1$.

2° On recherche les solutions de (1) développables en série entière sous la forme :

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (n \in \mathbf{N})$$

a. Écrire les relations nécessairement vérifiées par les coefficients a_n.

b. Calculer a_0.

c. Calculer a_{2p} en fonction de a_p $\quad (p \in \mathbf{N}^*)$.

d. Calculer $a_{(2^p)}$ lorsque $a_1 = 1$ $\quad (p$, entier strictement positif en exposant).

e. Que peut-on dire des a_{2p+1} $\quad (p \in \mathbf{N})$?

3° Expliciter les coefficients de la solution S dans le cas particulier suivant :

$$a_{2p+1} = a_{2p}\ , \quad \text{pour tout} \quad p \geqslant 1, \quad \text{avec} \quad a_1 = 1.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail